A betonnyomószilárdság szórása alsó korlátjának és alulmaradási tágassága felső korlátjának hatása a nyomószilárdság matematikai statisztikai értékelési rendjének működésére

GONDOLATOK ÉS ÁBRÁK AZ MSZ EN 206:2014 ÉS MSZ 4798:2015 BETONSZABVÁNY ÉRTELMEZÉSÉHEZ

Budapest, 2014. december

Dr. Kausay Tibor

A beton nyomószilárdságának matematikai statisztikai értékelési rendje adott *n* mintaelemszám (például próbakockák száma) mellett akkor működőképes, ha a szórás (*s*) – alulmaradási tágasság (*Taerwe*-eloszlás esetén: $\lambda_n \times s$, illetve *Student*-eloszlás esetén: $t_n \times s$) koordinátarendszerében az $y_{Taerwe} = \lambda_n \times s$, illetve $y_{Student} = t_n \times s$ egyenes metszi a P[s_{min}, 0], P[s_{min}, $(\lambda_n \times s)_{max}$, illetve $(t_n \times s)_{max}$], P[$s_{max,test}$, 0], P[$s_{max,test}$, $(\lambda_n \times s)_{max}$, illetve $(t_n \times s)_{max}$] pontokkal határolt térnegyedet,

ahol:

s_{min} **a nyomószilárdság jellemző (karekterisztikus) értékének meghatározása során számításba vehető legkisebb szórás, N/mm²;**

$s_{max,test}$ **a felvett koordinátarendszerben megjeleníthető tapasztalati szórások legnagyobbika, azaz az abszcissza-tengely végpontja, ábráinkon $s_{max,test} = 7$ N/mm²;**

λ_n ***Taerwe*-féle (alulmaradási) tényező;**

t_n ***Student*-féle (alulmaradási) tényező;**

$(\lambda_n \times s)_{max}$, **illetve** $(t_n \times s)_{max}$ **a nyomószilárdság jellemző (karekterisztikus) értékének** ($f_{ck} \leq f_{ck,test}$) **meghatározása során**

- **alkalmazandó konstans alulmaradási tágasság (ábráinkon az abszcissza-tengellyel párhuzamos vonal), N/mm², például:** $f_{ck} \leq f_{ck,test} = f_{cm,test} - 6$
- **vagy a számításba vehető legnagyobb alulmaradási tágasság (ábráinkon az abszcissza-tengellyel párhuzamos vonal alatti terület), N/mm², például:** $f_{ck} \leq f_{ck,test} = f_{cm,test} - \lambda_n \times s$ **és** $(\lambda_n \times s)_{max} = 6$, **amely utóbbi az** $f_{cm,test} - \lambda_n \times s$ **összefüggés érvényét korlátozza (ábráinkon az abszcissza-tengellyel párhuzamos vonal feletti területen);**

$f_{cm,test}$ **a nyomószilárdság tapasztalati (mért) átlagértéke, N/mm²**

Alulmaradási tényezők táblázata

Mintaszám *n*	Szabadságfok a *Student*-féle eloszlás esetén *n* - 1	*Student*-tényező t_n	*Taerwe*-tényező λ_n
	(*Stange* et al., 1966)		(*Taerwe*, 1986)
2	1	6,314	
3	2	2,920	2,67
4	3	2,353	2,20
5	4	2,132	1,99
6	5	2,015	1,87
7	6	1,943	1,77
8	7	1,895	1,72
9	8	1,860	1,67
10	9	1,833	1,62
11	10	1,812	1,58
12	11	1,796	1,55
13	12	1,782	1,52
14	13	1,771	1,50
15	14	1,761	*1,48*
20	19	1,729	
30	29	1,699	
	∞	*1,645*	

Megjegyzés az alulmaradási tényezők táblázatához

Az előző diakocka a táblázatában szereplő *Student*-tényező értékek *Stange – Henning* (1966) matematikai statisztikai könyvéből származnak. Ugyanezek az értékek találhatók *Mohr* (2008) mérnököknek és természettudósoknak szánt matematikai statisztikai könyvében.

Ezektől *a Student*-tényező értékektől bizonyos mértékig eltérnek a visszavont MSZ 4720-2:1980 szabványban szereplő *Student*-tényező értékek, mert azokat annak idején *Palotás* professzor az *Owen* könyvében szereplő, *Wald*- és *Wolfowitz*-féle adatokból határozta meg. (*Owen* 1962; *Palotás*: Mérnöki szerkezetek anyagtana I. kötet III. fejezet 9.93.4. szakasz, p. 645 (1979); *Szalai* 1982: 2.8.5. szakasz).

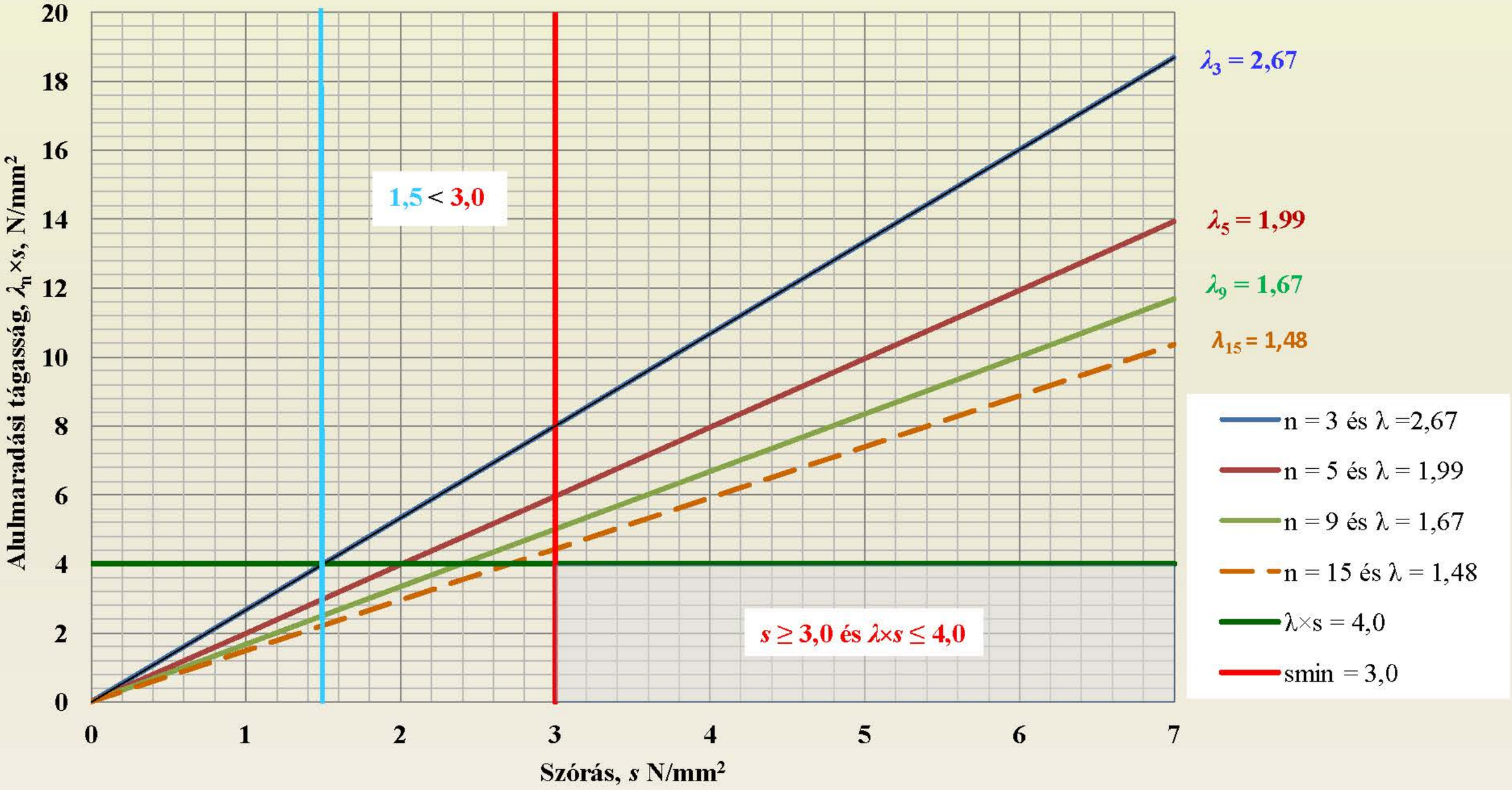
Az előző diakockán közölt táblázatban szereplő *Student*-tényezők valamelyest eltérnek az MSZ EN 1990:2011 Eurocode szabvány D1. táblázatában található *Student*-tényezőktől is:

Próbatestek száma, n	1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	∞
„V ismert”	2,31	2,01	1,89	1,83	1,80	1,77	1,74	1,72	1,68	1,67	1,64
„V ismeretlen”			3,37	2,63	2,33	2,18	2,00	1,92	1,76	1,73	1,64

Az MSZ EN 1990:2011 Eurocode szabvány D1. táblázatáról annyit tudunk, hogy

- **a „V ismert” sor adatait $(n/(n+1))^{0,5}$ tényezővel megszorozva, minden szorzat eredménye – a kerekítési eltérésektől eltekintve – 1,645, amely a *Gauss*-eloszlás 5 %-os alulmaradási hányadhoz tartozó alulmaradási tényezője;**
- **a „V ismeretlen” sor adatait $(n/(n+1))^{0,5}$ tényezővel megszorozva, minden szorzat eredménye – a kerekítési eltérésektől eltekintve – az n próbatest számhoz tartozó *Student*-tényezőt adja;**
- **ha $n \to \infty$, akkor $(n/(n+1))^{0,5} \to 1,0$.**

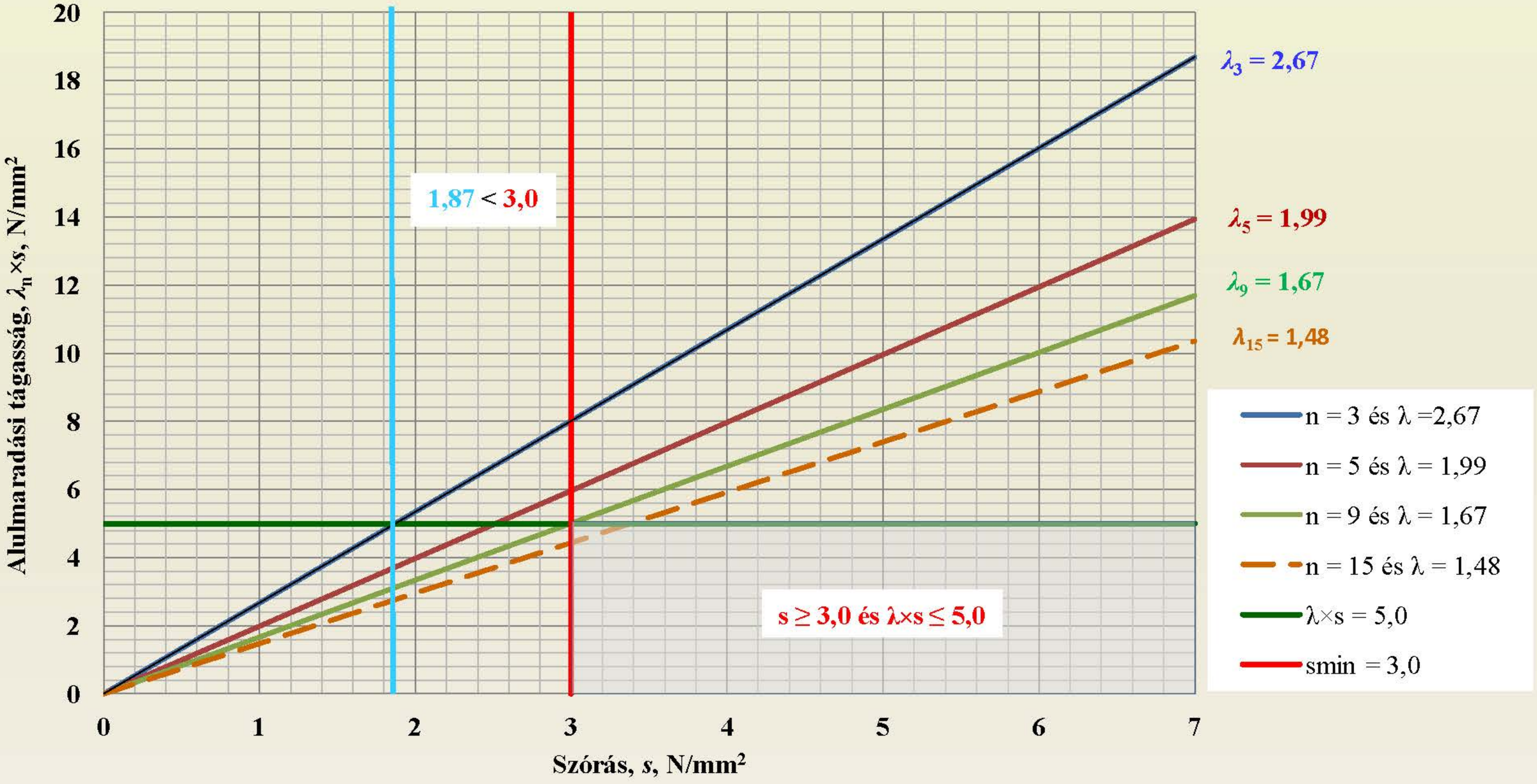
Alulmaradási tágasság *Taerwe*-eloszlás esetén, ha $\lambda_n \times s \leq 4{,}0$ és $s_{min} = 3{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $\lambda_n \times s \leq 4{,}0$ előírása esetén $n = 15$ próbatest sem lenne elegendő, mert $\lambda_{15} \times s_{min} = 1{,}48 \times 3{,}0 = 4{,}44 > 4{,}0$

$n = 3$ próbatest esetén pedig a *Taerwe*-tényezős összefüggés csak $s_{min} = 1{,}5$ feltétel mellett érvényesülne, mert $\lambda_3 \times s_{min} = 2{,}67 \times 1{,}498 = 4{,}0$

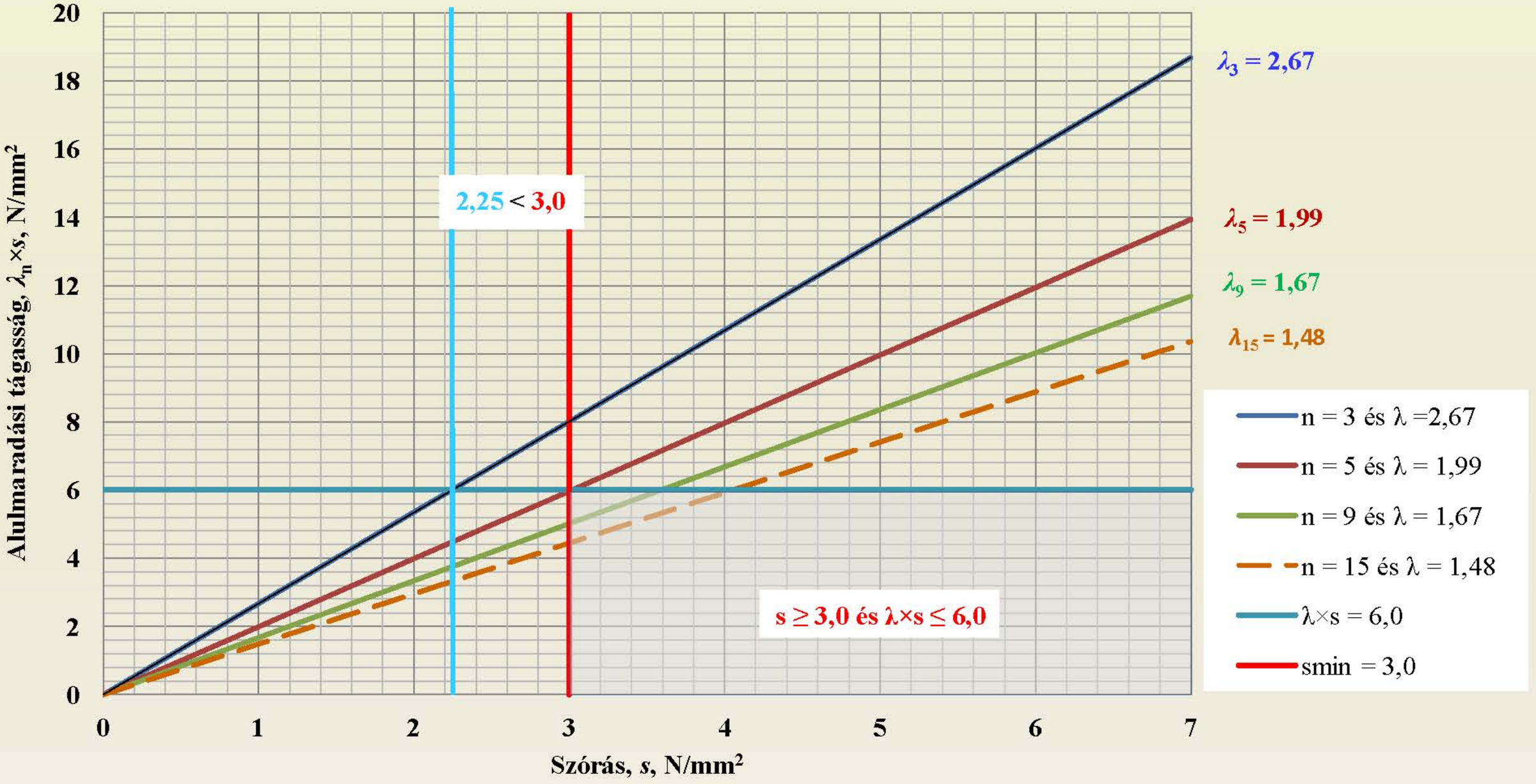
Alulmaradási tágasság *Taerwe*-eloszlás esetén, ha $\lambda_n \times s \leq 5{,}0$ és $s_{min} = 3{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $\lambda_n \times s \leq 5{,}0$ előírása esetén legalább $n = 9$ próbatest lenne szükséges, mert $\lambda_9 \times s_{min} = 1{,}67 \times 3{,}0 = 5{,}01 > 5{,}0$

$n = 3$ próbatest esetén pedig a *Taerwe*-tényezős összefüggés csak $s_{min} = 1{,}87$ feltétel mellett érvényesülne, mert $\lambda_3 \times s_{min} = 2{,}67 \times 1{,}87 = 4{,}99$

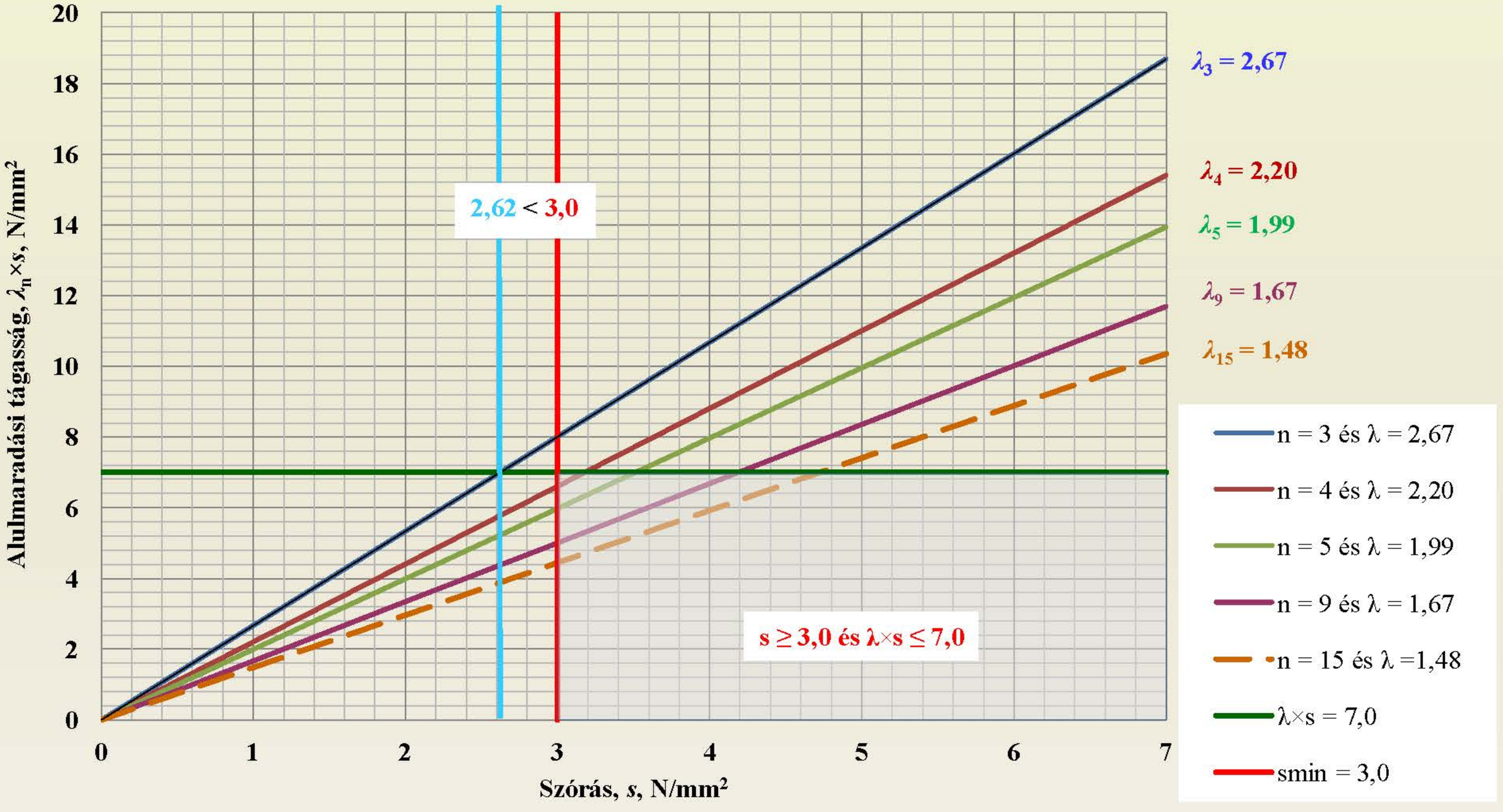
Alulmaradási tágasság *Taerwe*-eloszlás esetén, ha $\lambda_n \times s \leq 6{,}0$ és $s_{min} = 3{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $\lambda_n \times s \leq 6{,}0$ előírása esetén legalább $n = 5$ próbatest lenne szükséges, mert $\lambda_5 \times s_{min} = 1{,}99 \times 3{,}0 = 5{,}97 \sim 6{,}0$

$n = 3$ próbatest esetén pedig a *Taerwe*-tényezős összefüggés csak $s_{min} = 2{,}25$ feltétel mellett érvényesülne, mert $\lambda_3 \times s_{min} = 2{,}67 \times 2{,}25 = 6{,}01$

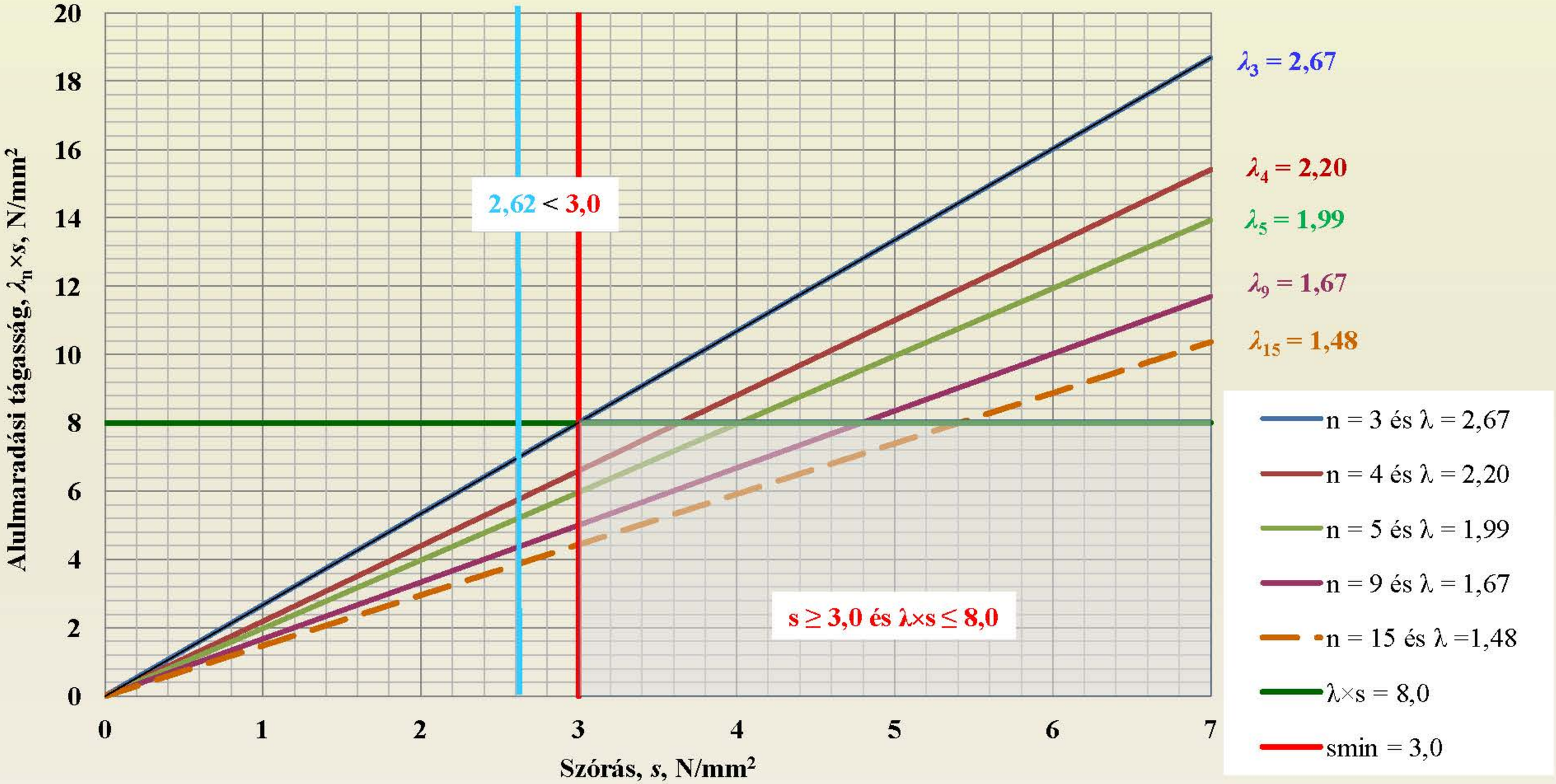
Alulmaradási tágasság *Taerwe*-eloszlás esetén, ha $\lambda_n \times s \leq 7{,}0$ és $s_{min} = 3{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $\lambda_n \times s \leq 7{,}0$ előírása esetén legalább $n = 4$ próbatest lenne szükséges, mert $\lambda_4 \times s_{min} = 2{,}20 \times 3{,}0 = 6{,}6 < 7{,}0$

$n = 3$ próbatest esetén pedig a *Taerwe*-tényezős összefüggés csak $s_{min} = 2{,}62$ feltétel mellett érvényesülne, mert $\lambda_3 \times s_{min} = 2{,}67 \times 2{,}62 = 7{,}0$

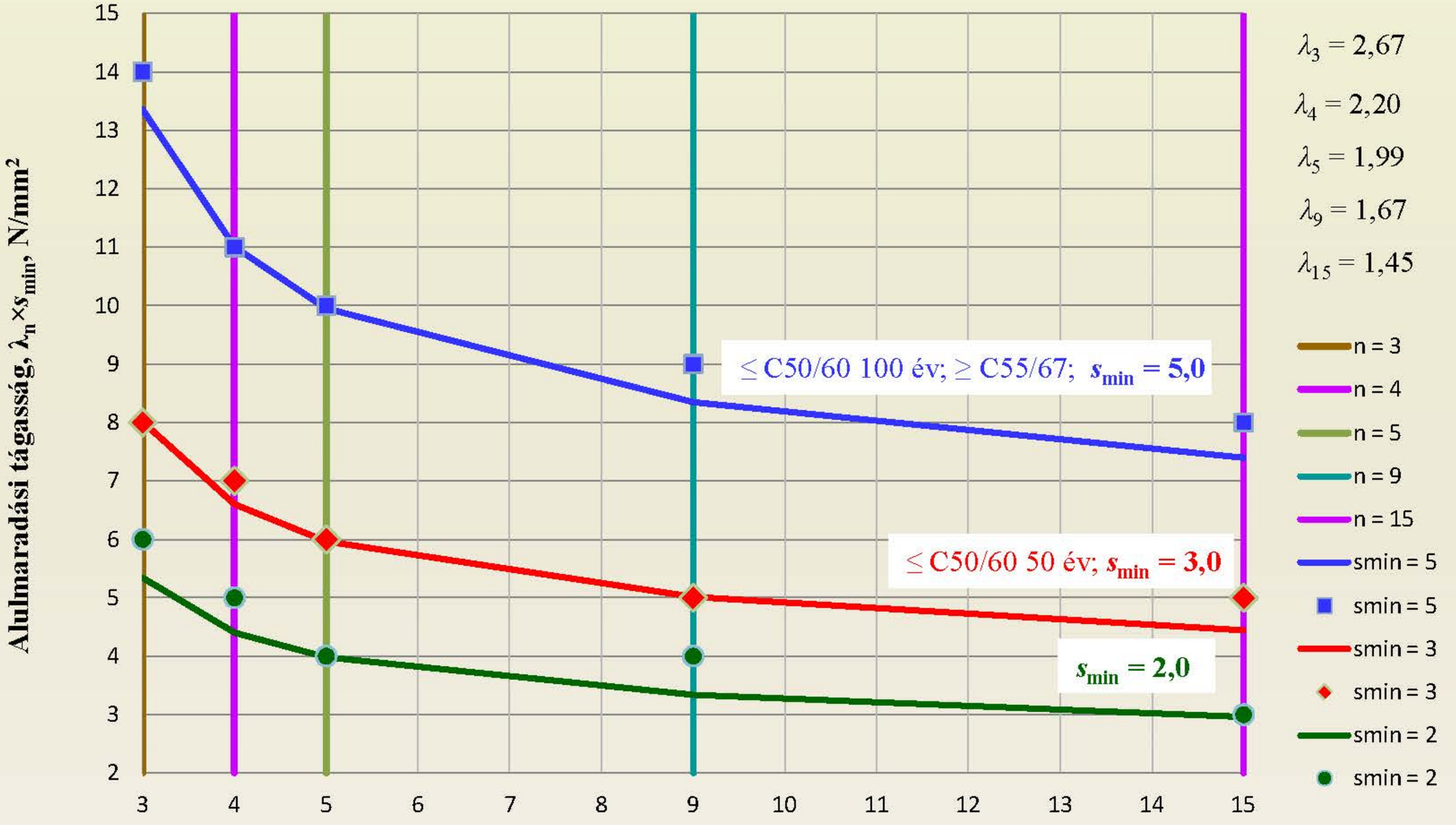
Alulmaradási tágasság *Taerwe*-eloszlás esetén, ha $\lambda_n \times s \leq 8{,}0$ és $s_{min} = 3{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $\lambda_n \times s \leq 8{,}0$ előírása esetén legalább $n = 3$ próbatest szükséges, mert $\lambda_3 \times s_{min} = 2{,}67 \times 3{,}0 = 8{,}01 \sim 8{,}0$

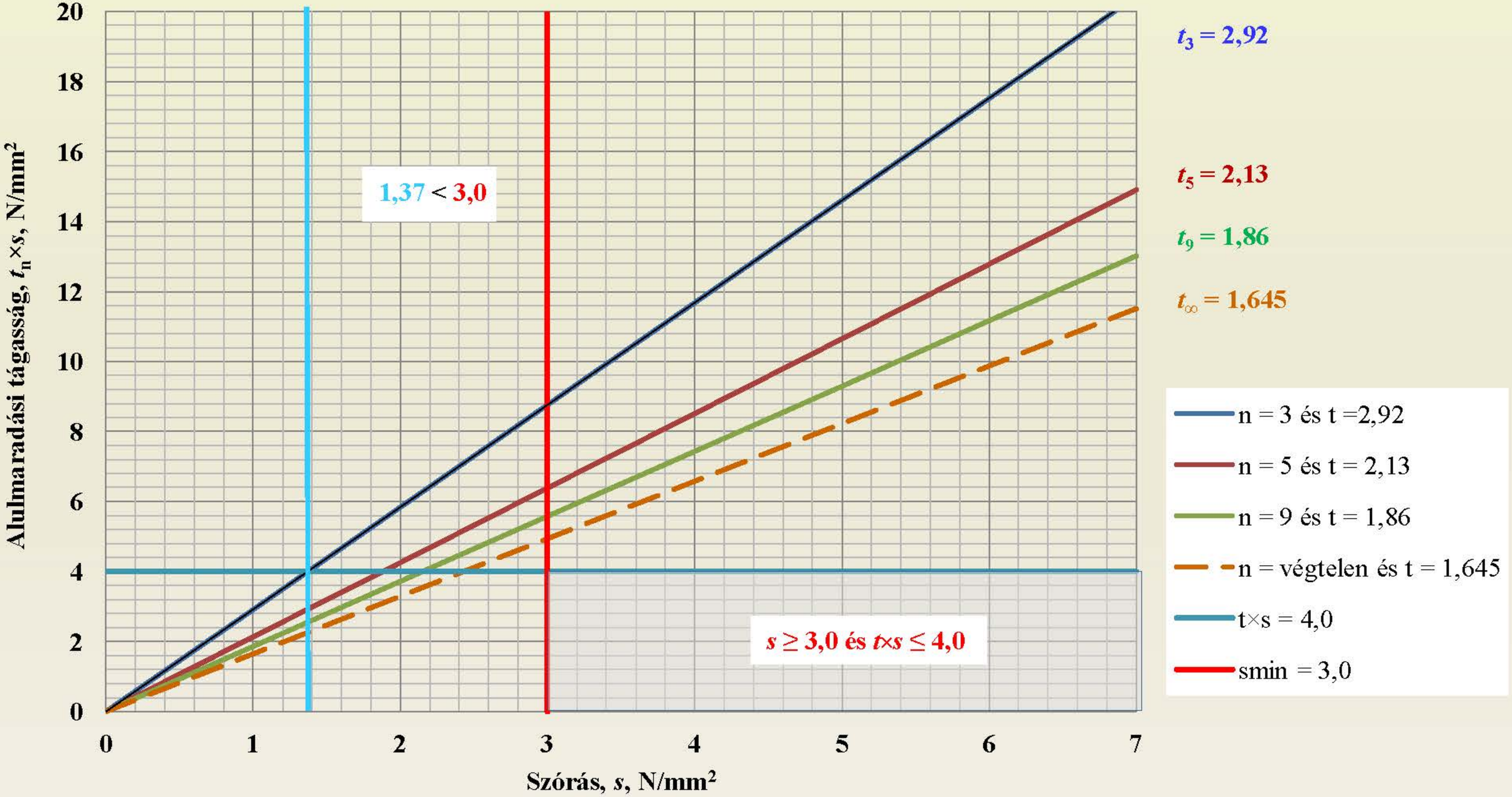
$n = 3$ próbatest esetén tehát a *Taerwe*-tényezős összefüggés $s_{min} = 3{,}0$ feltétel mellett érvényesül, mert $\lambda_3 \times s_{min} = 2{,}67 \times 3{,}0 = 8{,}01$

$\lambda_n \times s_{min}$ alulmaradási tágasság szükséges értéke az *n* darabszám függvényében, *Taerwe*-eloszlás esetén, ahhoz, hogy az s_{min} feltétel ne sérüljön



A vonalak feletti pontok a felfele kerekített egész számú szükséges $\lambda_n \times s_{min}$ értékek

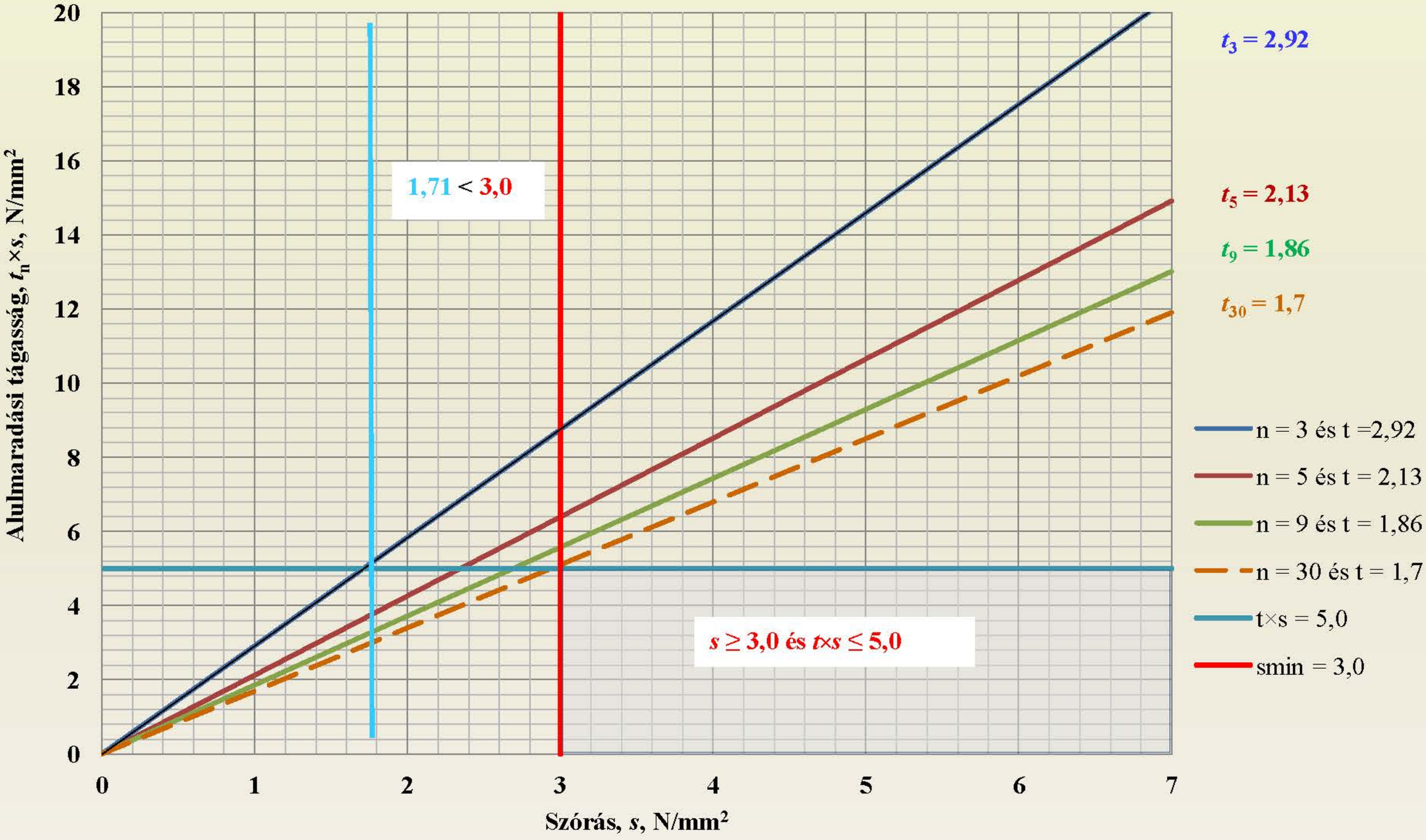
Alulmaradási tágasság *Student*-eloszlás esetén, ha $t_n \times s \leq 4{,}0$ és $s_{min} = 3{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $t_n \times s \leq 4{,}0$ előírása esetén, végtelen számú próbatest sem lenne elegendő, mert $t_\infty \times s_{min} = 1{,}645 \times 3{,}0 = 4{,}935 < 4{,}0$

***n* = 3 próbatest esetén pedig a *Student*-tényezős összefüggés csak $s_{min} = 1{,}37$ feltétel mellett érvényesülne, mert $t_3 \times s_{min} = 2{,}92 \times 1{,}37 = 4{,}0$**

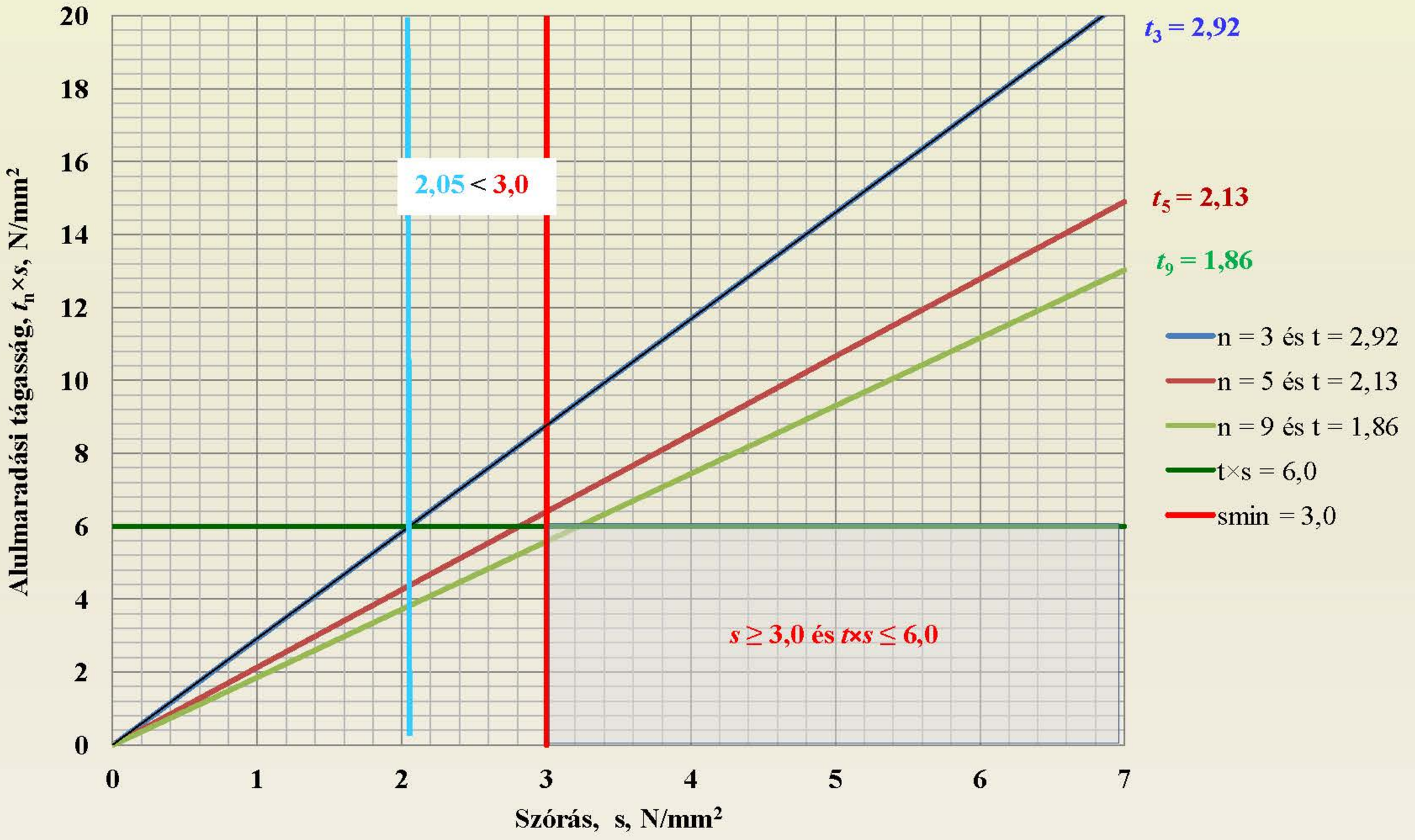
Alulmaradási tágasság *Student*-eloszlás esetén, ha $t_n \times s \leq 5{,}0$ és $s_{min} = 3{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $t_n \times s \leq 5{,}0$ előírása esetén legalább $n = 30$ próbatest lenne szükséges, mert $t_{30} \times s_{min} = 1{,}7 \times 3{,}0 = 5{,}1 < 5{,}0$

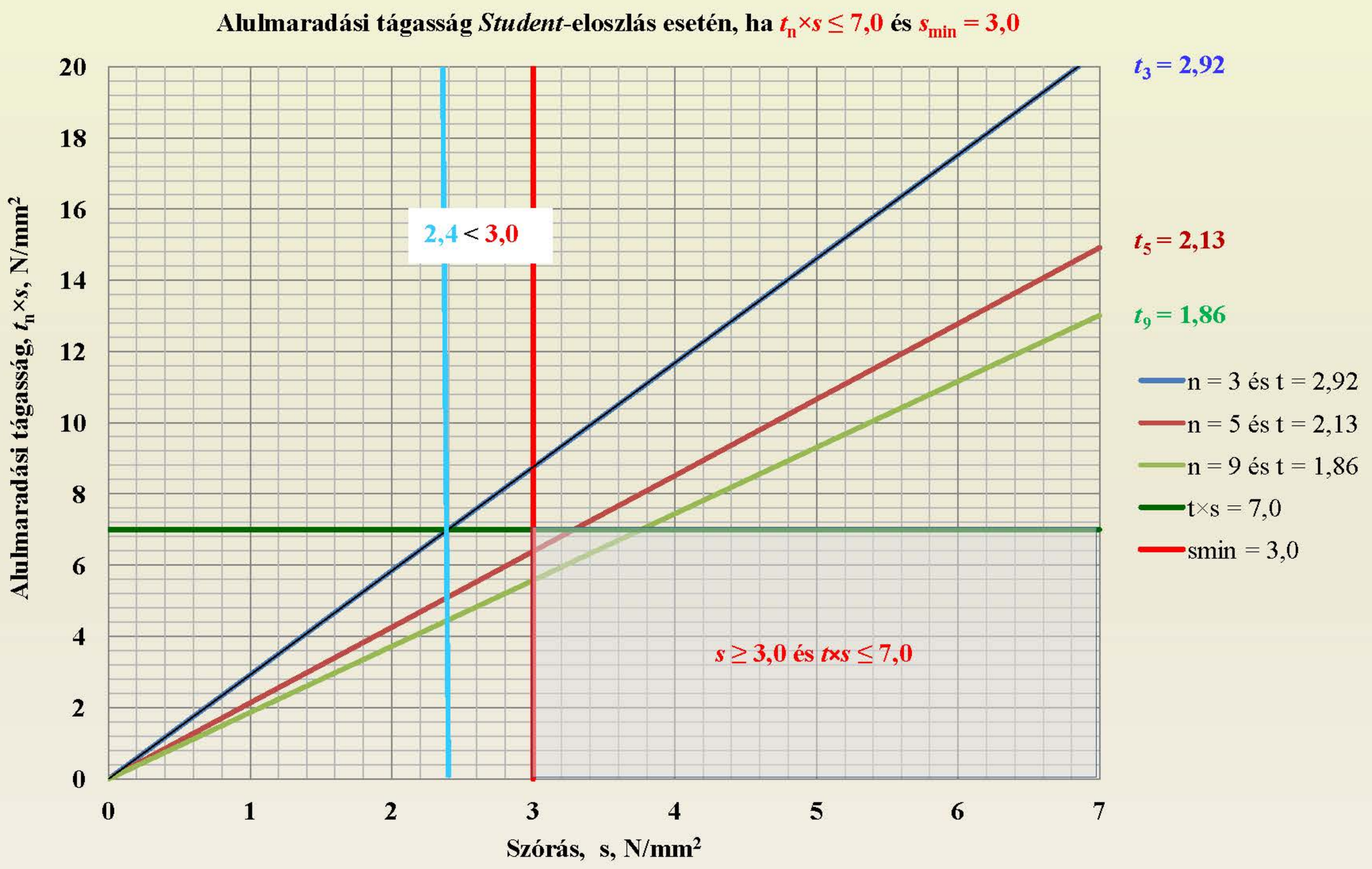
$n = 3$ próbatest esetén pedig a *Student*-tényezős összefüggés csak $s_{min} = 1{,}71$ feltétel mellett érvényesülne, mert $t_3 \times s_{min} = 2{,}92 \times 1{,}71 = 4{,}99 < 5{,}0$

Alulmaradási tágasság *Student*-eloszlás esetén, ha $t_n \times s \leq 6{,}0$ és $s_{min} = 3{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $t_n \times s \leq 6{,}0$ előírása esetén legalább $n = 9$ próbatest szükséges, mert $t_9 \times s_{min} = 1{,}86 \times 3{,}0 = 5{,}58 < 6{,}0$

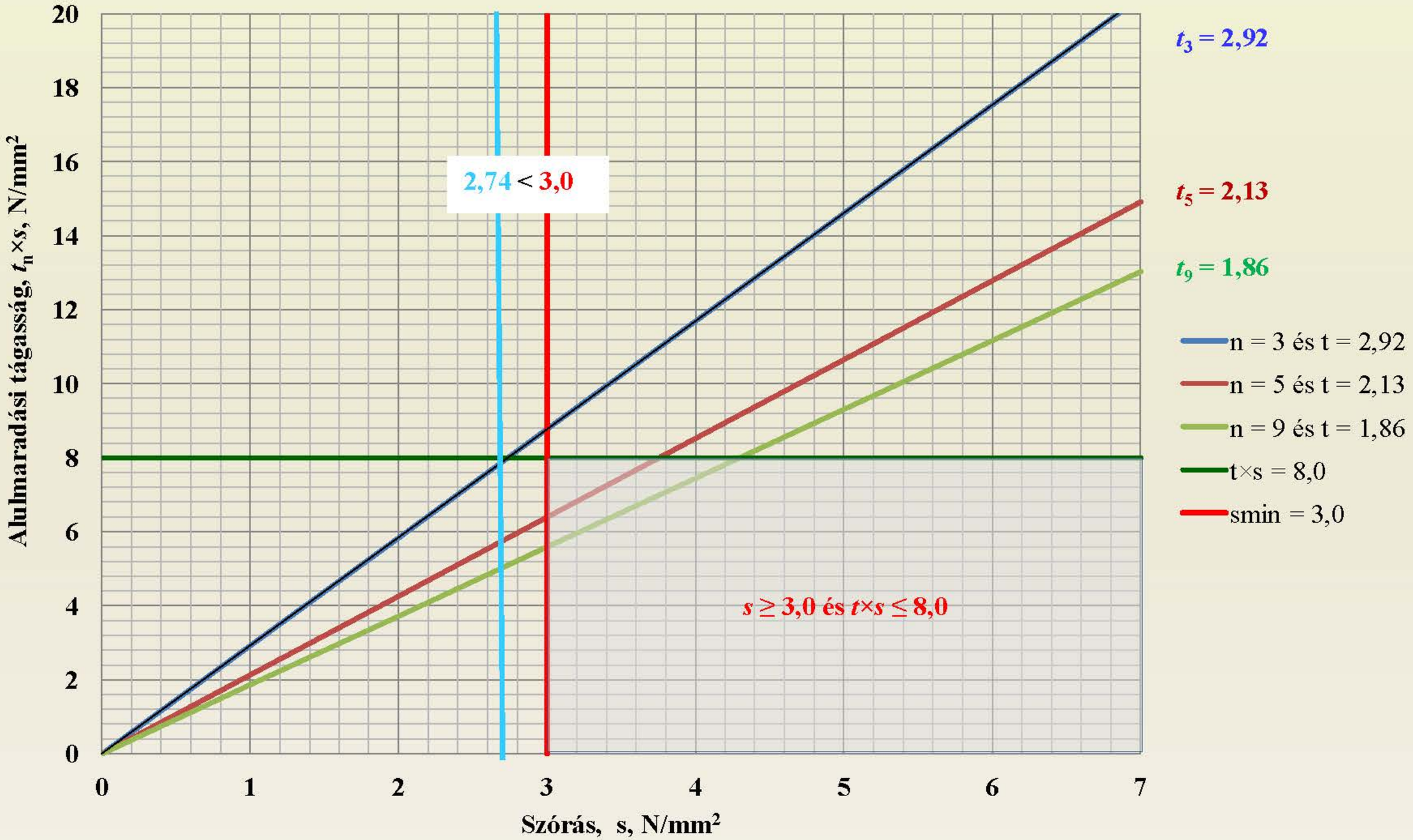
$n = 3$ próbatest esetén pedig a *Student*-tényezős összefüggés csak $s_{min} = 2{,}05$ feltétel mellett érvényesül, mert $t_3 \times s_{min} = 2{,}92 \times 2{,}05 = 5{,}99 < 6{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $t_n \times s \leq 7{,}0$ előírása esetén legalább $n = 5$ próbatest szükséges, mert $t_5 \times s_{min} = 2{,}13 \times 3{,}0 = 6{,}39 < 7{,}0$

$n = 3$ próbatest esetén pedig a *Student*-tényezős összefüggés csak $s_{min} = 2{,}397 \sim 2{,}4$ feltétel mellett érvényesül, mert $t_3 \times s_{min} = 2{,}92 \times 2{,}397 = 7{,}0$

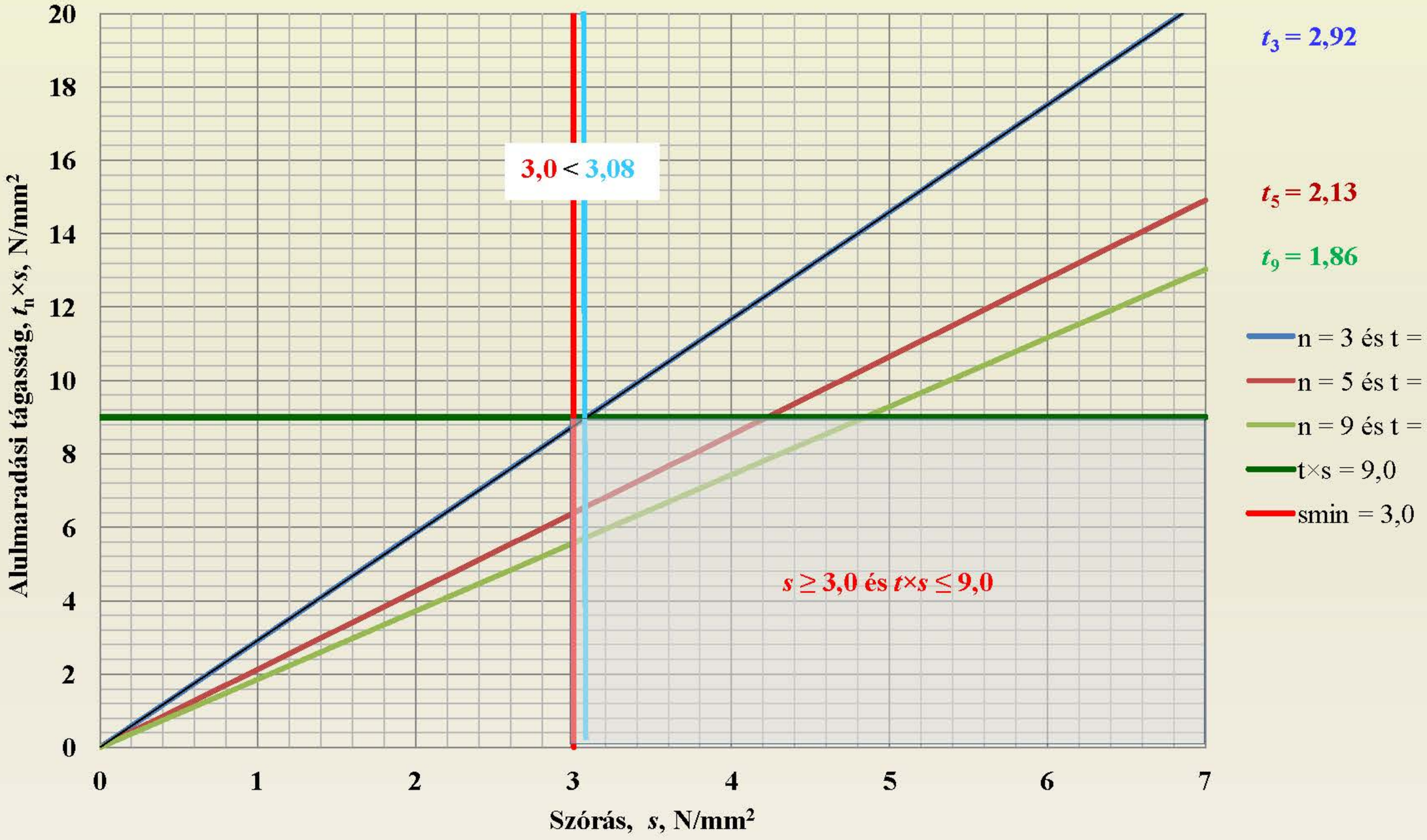
Alulmaradási tágasság *Student*-eloszlás esetén, ha $t_n \times s \leq 8{,}0$ és $s_{min} = 3{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $t_n \times s \leq 8{,}0$ előírása esetén legalább $n = 5$ próbatest szükséges, mert $t_5 \times s_{min} = 2{,}13 \times 3{,}0 = 6{,}39 < 8{,}0$

$n = 3$ próbatest esetén pedig a *Student*-tényezős összefüggés csak $s_{min} = 2{,}74$ feltétel mellett érvényesül, mert $t_3 \times s_{min} = 2{,}92 \times 2{,}74 = 8{,}0$

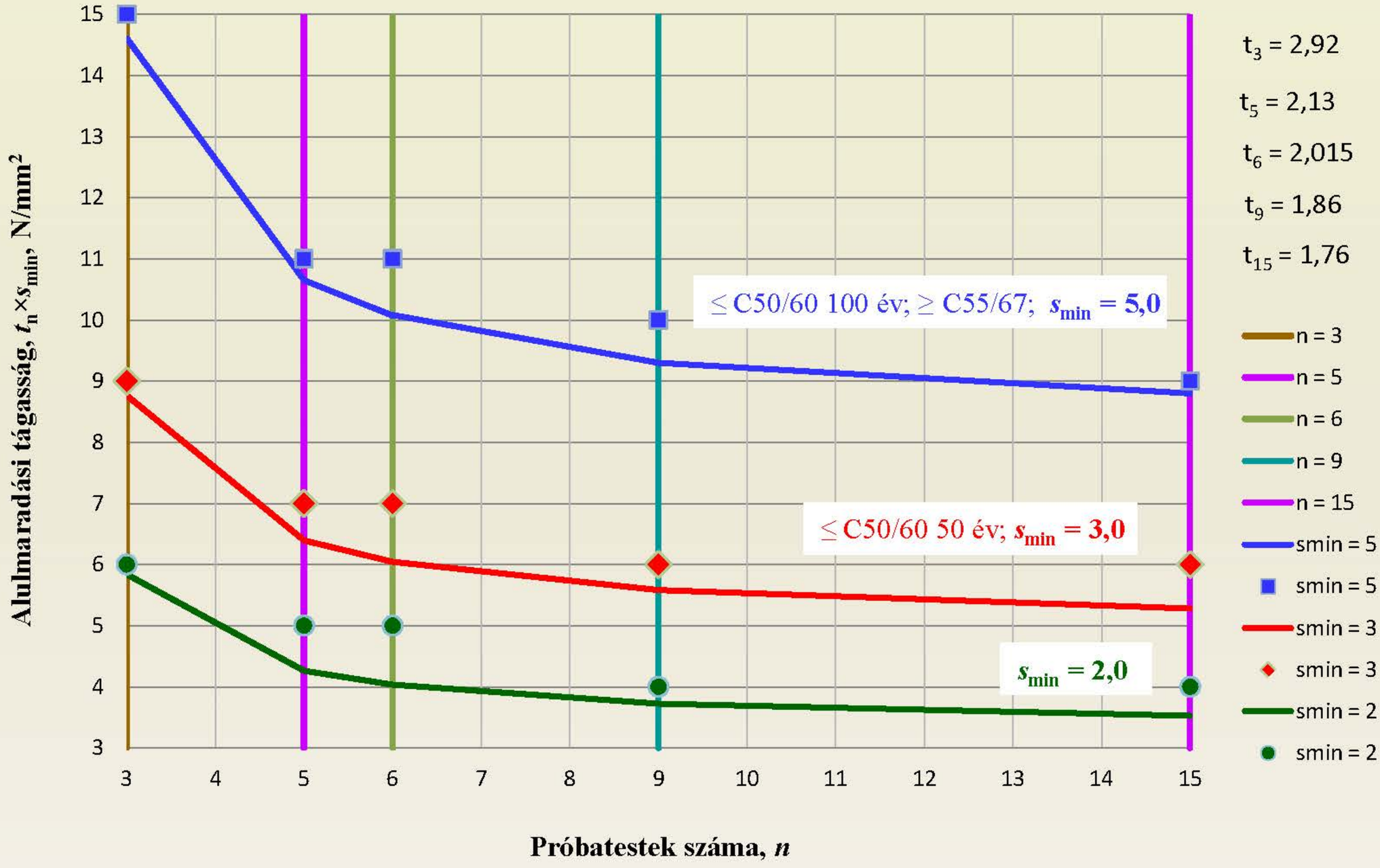
Alulmaradási tágasság *Student*-eloszlás esetén, ha $t_n \times s \leq 9{,}0$ és $s_{min} = 3{,}0$



Az $s_{min} = 3{,}0$ feltétel érvényesüléséhez $t_n \times s \leq 9{,}0$ előírása esetén $n = 3$ próbatest elegendő, mert $t_3 \times s_{min} = 2{,}92 \times 3{,}0 = 8{,}76 < 9{,}0$

$n = 3$ próbatest esetén tehát a *Student*-tényezős összefüggés $s_{min} = 3{,}08$ feltétel mellett érvényesül, mert $t_n \times s / t_3 = 9{,}0/2{,}92 = 3{,}08 > 3{,}0$

$t_n \times s_{min}$ alulmaradási tágasság szükséges értéke az n darabszám függvényében, *Student*-eloszlás esetén, ahhoz, hogy az s_{min} feltétel ne sérüljön



A vonalak feletti pontok a felfele kerekített egész számú szükséges $t_n \times s_{min}$ értékek

Alulmaradási tágasság szükséges értéke az *n* darabszám függvényében, ahhoz, hogy az s_{min} feltétel ne sérüljön

Táblázatos összefoglalás

Próbatestek száma, n	Alulmaradási tágasság szükséges értéke ***Taerwe*-eloszlás** esetén, $\lambda_n \times s_{min}$, N/mm²			Alulmaradási tágasság szükséges értéke ***Student*-eloszlás** esetén, $t_n \times s_{min}$, N/mm²		
s_{min}, N/mm²	**2,0**	**3,0**	**5,0**	**2,0**	**3,0**	**5,0**
3	5,34 → **6**	8,01 → **8**	13,35 → **14**	5,84 → **6**	8,76 → **9**	14,60 → 15
4	4,40 → **5**	6,60 → **7**	11,00 → **11**	**5**	**8**	**13**
5	3,98 → **4**	5,97 → ***6***	9,95 → **10**	4,26 → **5**	6,39 → **7**	10,65 → **11**
6	**4**	**6**	**10**	4,03 → **5**	6,04 → **7**	10,08 → **11**
9	3,34 → **4**	5,01 → **5**	8,35 → **9**	3,72 → **4**	5,58 → **6**	9,30 → **10**
15	2,96 → **3**	4,44 → **5**	7,40 → **8**	3,52 → **4**	5,28 → **6**	8,80 → **9**

Hosser, D. – Gensel, D.: **Kritische Bewertung der Statistik beim Konformitätsnachweis der Betondrickfestikkeit nach prEN 206. TU Braunschweig, IBMB (Inst. F. Baustoffe, Massivbau und Brandschutz) Im Auftrag des Deutschen Beton-Verein E.V. Braunschweig, 1995.**

OC-görbe (Operating characteristic curve) szemléletesen mutatja a *Taerwe*- féle és a *Student*- féle eloszlásra épülő nyomószilárdság megfelelőség igazolási eljárás különbözőségét

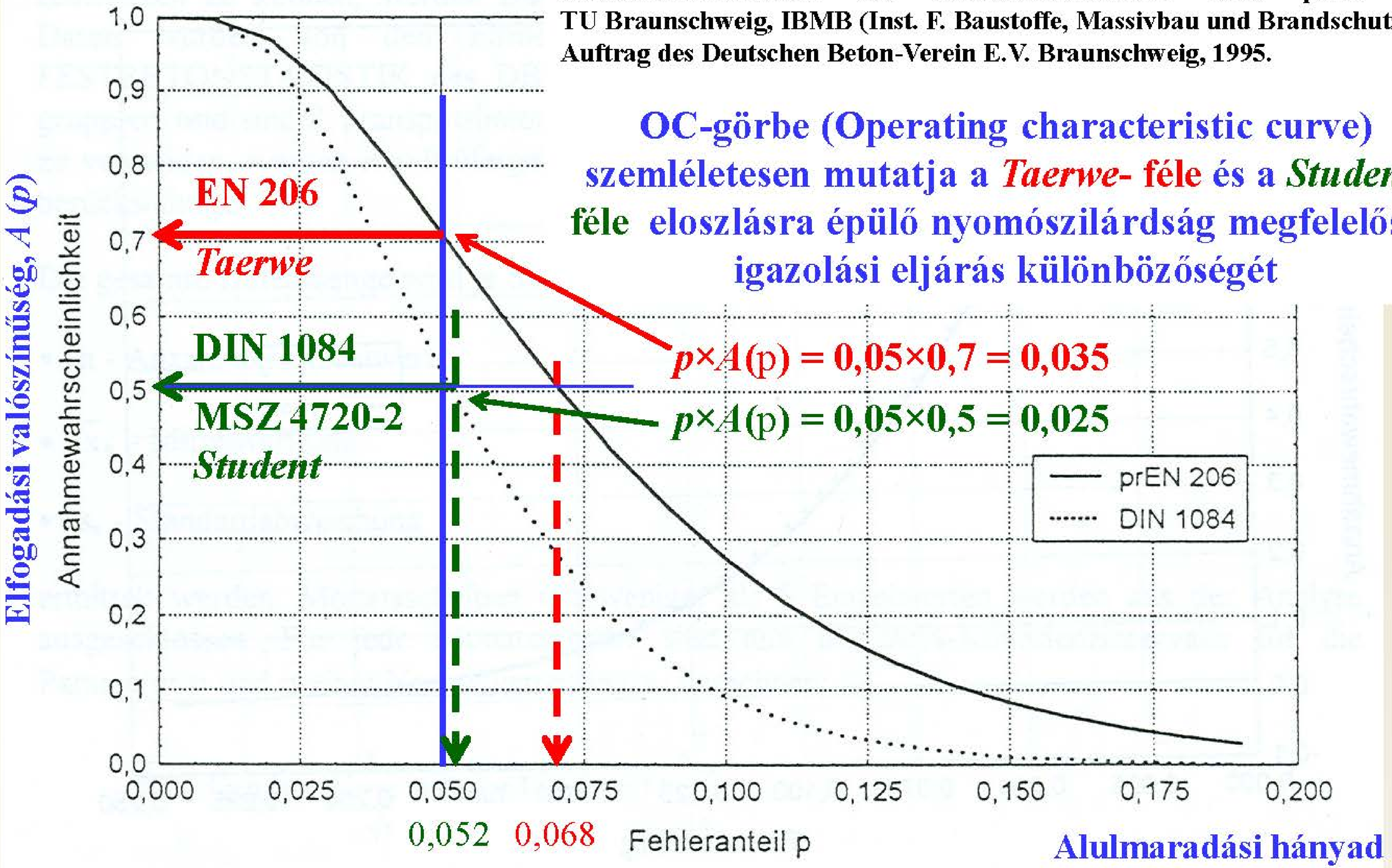


Bild 1: Annahmekennlinien zum Konformitätsnachweis nach prEN 206 und DIN 1084

Elfogadási jelleggörbe a megfelelőség igazolásához az EN 206 és az MSZ 4720-2 szabvány szerint